LAPLACE TRANSFORM

تبدیل لاپلاس

مقدمه تبدیل لاپلاس

- تبدیل لاپلاس کمبودهای تبدیل فوریه را جبران می کند.
- کمبودهای تبدیل فوریه:
  1. برای سیگنالهای ناپایدار وجود ندارد.
  2. اثرات مقادیر اولیه را به حساب نمی آورد.

$$f(t) \rightarrow F(s)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

- مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

A) $x(t) = e^{-2t}u(t)$

- B) $y(t) = -e^{-2t}u(-t)$

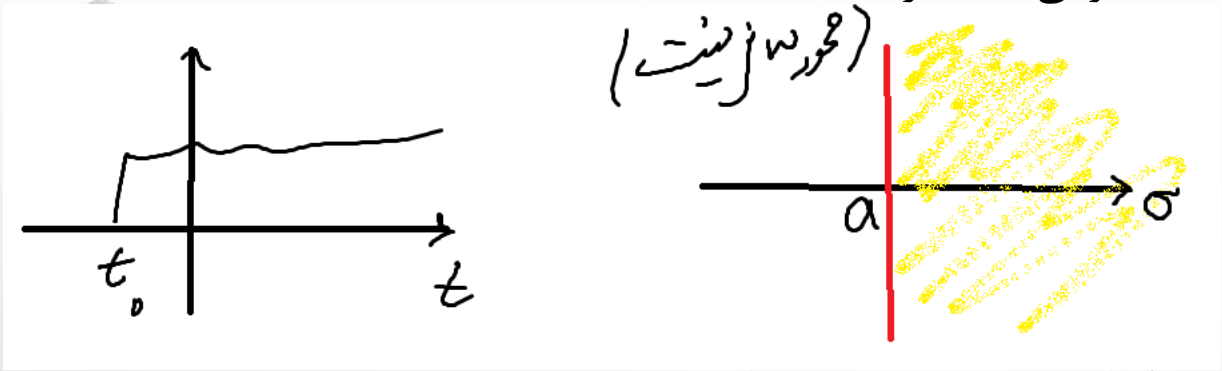
عکس لاپلاس، ناحیه همگرایی (REGION OF CONVERGENCE, R.O.C.)

- از جداول استفاده می کنیم.

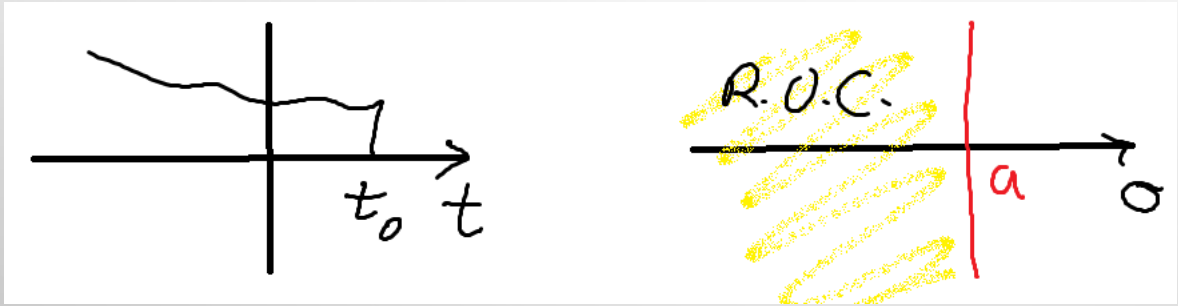
- $F(s) = \frac{1}{s+2}$

نکاتی در مورد R.O.C.

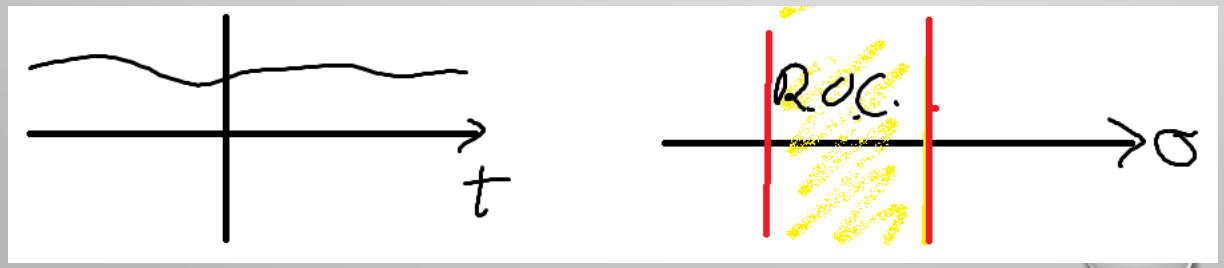
1. اگر سیگنال راستگرا باشد ناحیه همگرایی سمت راست صفحه است.



2. اگر سیگنال چپگرا باشد ناحیه همگرایی سمت چپ صفحه است.



3. اگر سیگنال دوطرفه باشد ناحیه همگرایی به صورت نوار خواهد بود.



- مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

A) $x(t) = e^{2t}u(t)$

- B) $y(t) = -e^{2t}u(-t)$

- مثال: تبدیل لاپلاس حساب کنید.

- $f(t) = e^{-at}u(t)$

نکته

- در سیگنالهای پایدار ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ می شود و تبدیل فوریه وجود دارد.
- در سیگنالهای ناپایدار ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ نمی شود و تبدیل فوریه وجود ندارد.

- مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

A) $x(t) = e^{-|t|}$

تبدیل لاپلاس یکطرفه UNILATERAL LAPLACE TRANSFORM

- $\mathcal{X}(s) = \mathcal{L}_u\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$

- با داشتن تبدیل لاپلاس یکطرفه می توانیم :

1. اثر مقدار اولیه را داشته باشیم.
2. با تعریف انتگرال از صفر منفی می توان از سیگنالهایی مانند تابع ضربه واحد (دلتای دیراک) تبدیل لاپلاس گرفت.

ویژگی های تبدیل لاپلاس

- بیشتر ویژگی های تبدیل لاپلاس مانند تبدیل فوریه است.
- در این ویژگی ها ناحیه همگرایی مناسب فرض شده است.
- جاهایی که تبدیل لاپلاس یک طرفه و دوطرفه ویژگی متفاوتی دارند، نوع تبدیل ذکر شده است.

1. خطی بودن

$$ax(t) + bh(t) \rightarrow aX(s) + bH(s)$$

2. شیفت زمانی

$$x(t - t_0) \rightarrow e^{-st_0}X(s)$$

3. تغییر مقیاس

$$x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$$

4. شیفت در حوزه S

$$x(t)e^{s_0 t} \rightarrow X(s - s_0)$$

5. کانولوشن

$$x(t) * h(t) \rightarrow X(s)\, H(s)$$

6. مشتق در حوزه S

$$-tx(t) \rightarrow \frac{dX(s)}{ds}$$

$$(-t)^n x(t) \rightarrow \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

7. مشتق در حوزه زمان

$$Bilateral\ \mathcal{L}.T.: \frac{dx}{dt} \rightarrow sX(s)$$

$$Unilateral\ \mathcal{L}.T.: \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow sX(s) - x(0^-)$$

8. مشتق های مرتبه های بالاتر

$$Bilateral\ \mathcal{L}.T.: \frac{d^n x}{dt^n} \rightarrow s^n X(s)$$

$$Unilateral\ \mathcal{L}.T.: \frac{d^n x}{dt^n}$$

$$\rightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x^{(1)}(0^-) - s^{n-3}x^{(2)}(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-)$$

9. انتگرال در حوزه زمان

$$Bilateral\ L.T.: \begin{cases} \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow \dfrac{X(s)}{s} \\ \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow \dfrac{X(s)}{s} \end{cases}$$

$$Unilateral\ L.T. \begin{cases} \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow \dfrac{X(s)}{s} \\ \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightarrow \dfrac{X(s)}{s} + \dfrac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau \end{cases}$$

10. تئوری (قضیه) مقدار اولیه: (شامل ضربه در مبدا نباشد)

$$lim_{t\to 0^+} x(t) = x(0^+) = lim_{s\to\infty} sX(s)$$

11. قضیه مقدار نهایی (فقط برای سیگنالهای پایدار)

$$lim_{t\to\infty}\ x(t) = x(\infty) = lim_{s\to 0} sX(s)$$

- مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

$a)\ x(t) = u(t)$

$b)\ x(t) = \delta(t)$

- مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

a) A) $x(t) = \delta(t - t_0)$

- مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

$a)\ x(t) = \delta(t) - 5e^{-t}u(t)$

$b)\ x(t) = Cos(3t)u(t)$

- مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

$a)\ x(t) = e^{-t}\mathrm{COS}(4t)u(t)$

$b)\ x(t) = \mathrm{SIN}(2t)\,u(t)$

- مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

a) $x(t) = tu(t)$

$b)\ x(t) = t^2u(t)$

- مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

a) $x(t) = t^n u(t)$

b) $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$

نکاتی مهم درباره R.O.C.

1. R.O.C. در صفحه S از نوارهایی موازی با محور $j\omega$ تشکیل می شود.
2. ریشه های صورت **صفرها**ی تابع و ریشه های مخرج **قطب های** تابع نامیده می شوند. R.O.C. تبدیل لاپلاس توابع گویا هیچ قطبی را شامل نمی شود.
3. اگر $x(t)$ عمر محدود داشته و مطلقا انتگرال پذیر باشد R.O.C. تمام صفحه است.
4. اگر R.O.C. شامل محور $j\omega$ باشد سیگنال تبدیل فوریه هم دارد و تبدیل فوریه آن با قرار دادن $S = j\omega$ در تبدیل لاپلاس به دست می آید.

- مثال: تبدیل لاپلاس و فوریه تابع زیر را محاسبه کنید.

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

تبدیل لاپلاس توابع پرکاربرد

$f(t)$	F(s)	R.O.C.
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} < 0$
$\frac{t^n}{n!}u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$Re\{s\} > 0$
$\delta(t)$	1	All s
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	All s
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} < -a$

$f(t)$	F(s)	R.O.C.
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$Re\{s\} > -a$
$Cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > 0$
$Sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > 0$
$e^{-at}Cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > -a$
$e^{-at}Sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > -a$

محاسبه عکس لاپلاس

$$F(s) = P(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

- که در آن درجه صورت کسر از مخرج کوچکتر است.
- برای محاسبه عکس لاپلاس ابتدا باید ریشه های مخرج یعنی قطبها را محاسبه کنیم: Q(S)=0 سه حالت برای قطبها ممکن است اتفاق بیفتد:

1. *قطب ساده و حقیقی*

$$F(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{R(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$$F(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n}$$

$$k_j = \left(s-p_j\right)F(s)|_{s=p_j}$$

- مثال: عکس لاپلاس تابع زیر را محاسبه کنید.

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s+1)(s^2 + 5s + 6)}$$

2. قطب تکراری

$$\mathrm{F(S)} = \frac{R(s)}{(s-p_1\ )^{n_1}\dots(s-p_r\ )^{n_r}}$$

$$F(s)$$

$$= \frac{k_{11}}{(s-p_1\ )^{n_1}} + \cdots + \frac{k_{1n1}}{(s-p_1\ )} + \frac{k_{21}}{(s-p_2\ )^{n_2}} + \cdots + \frac{k_{1n2}}{(s-p_2\ )} + \cdots$$

$$k_{11} = (s-p_1)^{n_1} F(s)|_{s=p_1}$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds}(s-p_1)^{n_1} F(s)|_{s=p_1}$$

$$k_{13} = \frac{d^2}{2!\,ds^2}(s-p_1)^{n_1} F(s)|_{s=p_1}$$

- مثال: عکس لاپلاس تابع زیر را محاسبه کنید.

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^3}$$

3. قطب مختلط

$$F(s) = \frac{k}{(s+a)^2+b^2} \rightarrow f(t) = \frac{k}{b} e^{-at} Sin(bt)u(t)$$

$$F(s) = \frac{k(s+a)}{(s+a)^2+b^2} \rightarrow f(t) = ke^{-at} Cos(bt)u(t)$$

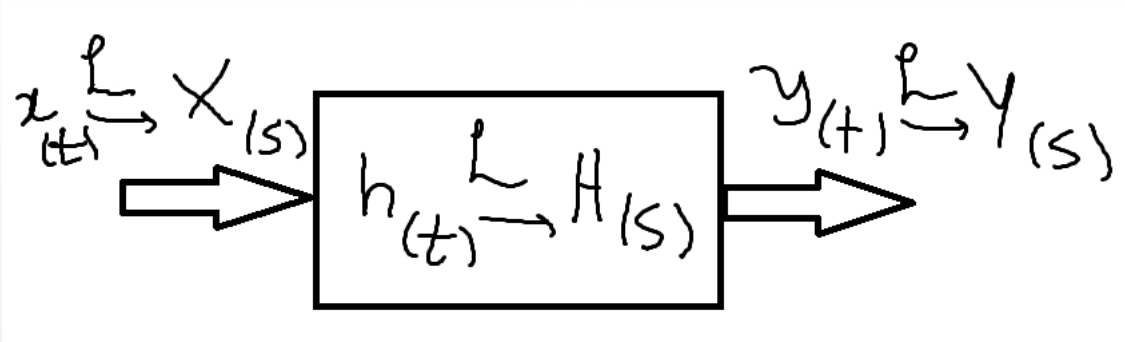
- مثال: عکس لاپلاس تابع زیر را محاسبه کنید.

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 7}{((s+2)^2+4)(s+1)}$$

- مثال: عکس لاپلاس تابع زیر را محاسبه کنید.

$$F(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+2)\ \ (s+1)^2}$$

تابع تبدیل سیستم LTI



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- مثال: الف) پاسخ ضربه سیستم زیر را محاسبه کنید.

$$\dot{y} + 3y = x$$

ب) پاسخ ورودی صفر با حالت اولیه $y(0) = 2$ را به دست آورید.

ج) پاسخ پله سیستم را به دست آورید.

د)اگر ورودی پله واحد و حالت اولیه $y(0) = 1$ باشد، خروجی را حساب کنید.

مثال: معادله دیفرانسیل سیستم توصیف شده با پاسخ فرکانسی زیر را محاسبه کنید.

$$H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 2s + 1}$$

POLES & ZEROS قطب ها و صفرها

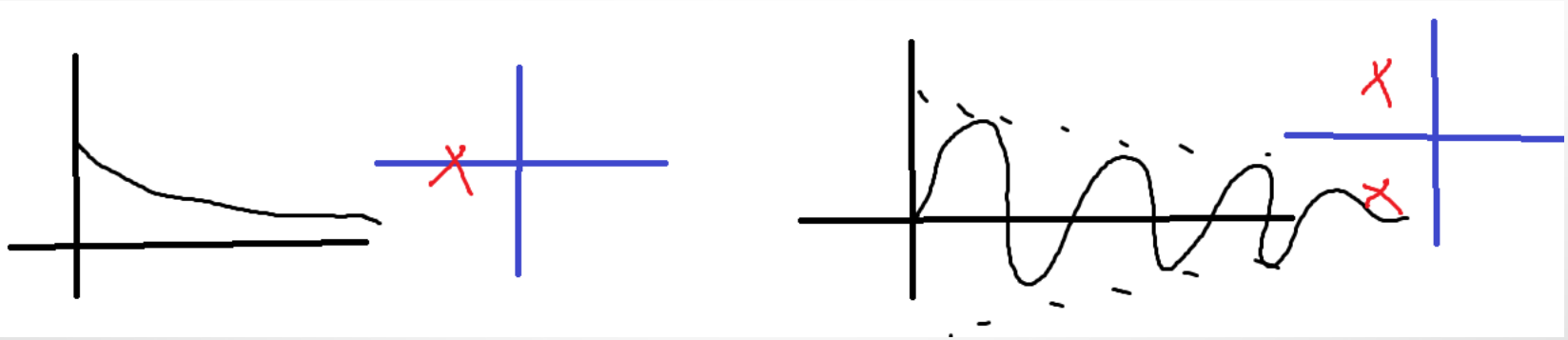
- صفرتابع تبدیل: ریشه های صورت
- قطب ها: ریشه های مخرج تا بع تبدیل

مثال: نمودار صفر-قطب تابع تبدیل زیر را در صفحه اعداد مختلط رسم کنید.

$$H(s) = \frac{4(s+3)(s-4)}{s(s^2+1)(s^2+2s+2)(s+6)(s+8)^2}$$

پایداری سیگنالهای علی از روی نمایش قطب

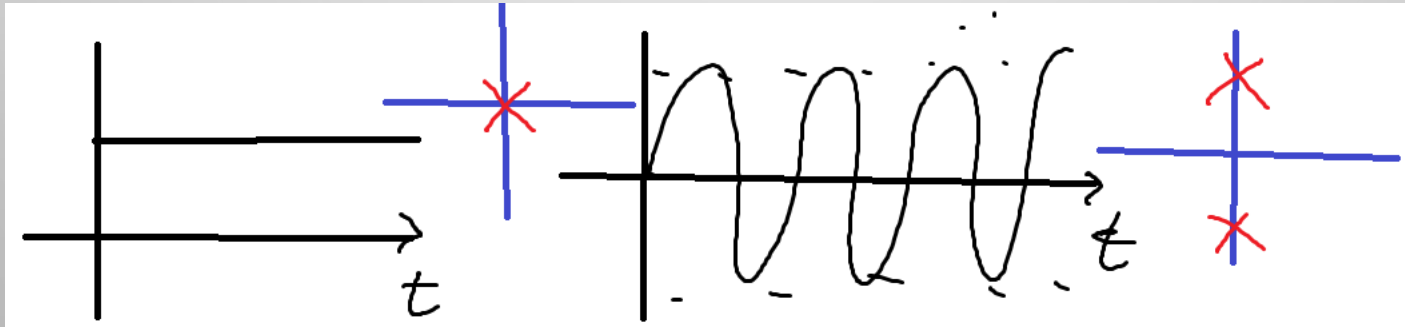
الف) سیگنال پایدار مجانبی: با افزایش زمان مقدار نا محدود پیدا نکند و به سمت صفر میل کند. قطب ها سمت چپ محور JW



ب) سیگنال پایدار: با افزایش زمان بدون کران افزایش پیدا نکند ولی به صفر هم میل نکند.

۱)قطبها سمت چپ محور JW

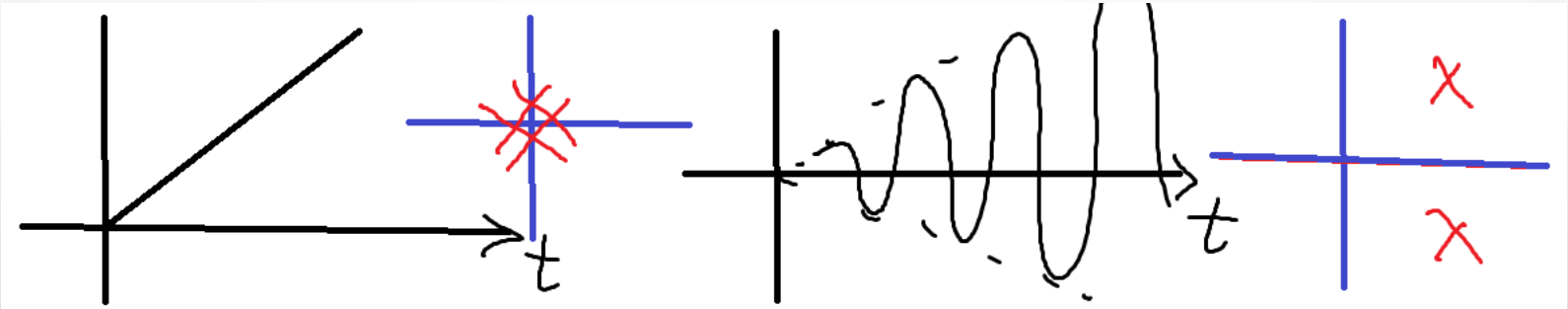
۲)قطب منفرد روی محور JW



پایداری سیگنالهای علی از روی نمایش قطب

ج) سیگنال نا پایدار. ۱) حداقل یک قطب سمت راست محور JW

۲) قطب تکراری روی محور JW



پایداری سیستم های LTI (با فرض علی بودن سیستم)

الف) سیستم پایدار: قطب ها سمت چپ محور JW

ب) سیستم روی مرز ناپایداری: قطب منفرد روی محور JW

ج) سیستم ناپایدار:

۱)حداقل یک قطب سمت راست محور JW

۲) قطب تکراری روی محور JW

نکته مهم: سیستم پایدار است اگر و تنها اگر ناحیه همگرایی تابع تبدیل شامل محور JW باشد.

- مثال: سیستمی با پاسخ ضربه زیر داریم.

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

الف) آیا سیستم علی است؟

ب) تابع تبدیل؟

ج) نمودار صفر قطب را رسم کنید.

د) آیا سیستم پایدار است؟

- مثال: سیستمی با پاسخ ضربه زیر داریم.

$$h(t) = e^{-|t|}$$

الف) آیا سیستم علی است؟

ب) تابع تبدیل؟

ج) نمودار صفر قطب را رسم کنید.

د) آیا سیستم پایدار است؟

- مثال: سیستمی با پاسخ ضربه زیر داریم.

$$\mathrm{H}(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

الف) اگر سیستم علی باشد ROC و پاسخ ضربه را تعیین کنید ؟

ب) آیا سیستم قبل پایدار است؟

ج) نمودار صفر قطب را رسم کنید.

د) اگر سیستم پایدار باشد ROC و پاسخ ضربه را تعیین کنید ؟ آیا علی است؟